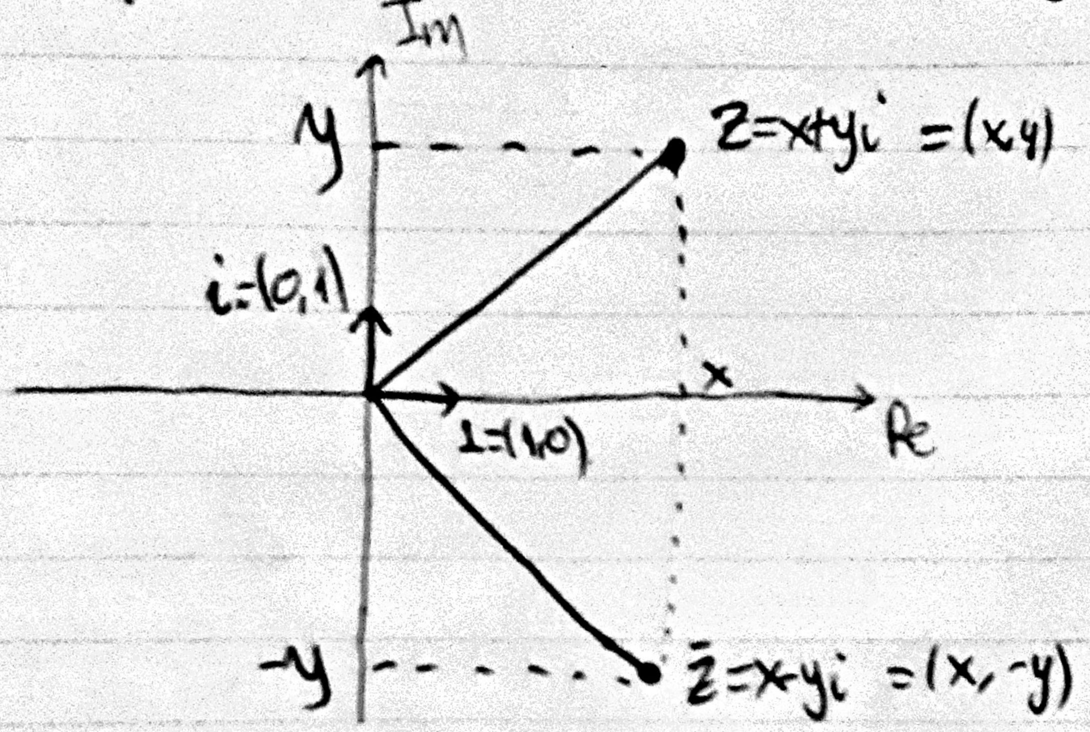
Μάθημα 3ο

01/03/18

$z \in \mathbb{C} \iff \underbrace{z = x + yi}_{\text{αλγεβρική μορφή}}$ με $x, y \in \mathbb{R} \iff z \overset{\text{αντ}}{=} (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Μιγαδικό Επίπεδο



Συνάρτηση Δύναμη

$\forall n \in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\} \quad \mathbb{C} \ni z \longmapsto z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n\text{-φορές}}$

συνάρτηση δύναμης στο $\mathbb{C}$ για $n \in \mathbb{N}$

$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \ni z \longmapsto z^{-n} = 1/z^n$ και $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : z^0 = 1$

ΕΧΩ ΤΑ ΕΞΗΣ: 1) $z^n z^m = z^{n+m}$ σύμβαση: $0^0 = 1$

2) $(z^n)^m = z^{nm}$, 3) $(z_1 z_2)^m = z_1^m z_2^m$

Έστω $z = x+iy \in \mathbb{C}$ με $x,y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2 - y^2 + i2xy$

$z^3 = z^2 z = ((x^2-y^2)+i2xy)(x+yi) =$

$= (x^2-y^2)x - 2xy^2 + i(2x^2y + y(x^2-y^2)) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

Άσκηση: Γράψτε σε αλγεβρική μορφή τα $\frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3}$

Εκθετική Συνάρτηση στο $\mathbb{C}$

Για κάθε φανταστικό αριθμό $\underbrace{iy}_{=0+iy=(0,y)} \in \mathbb{C}$ με $y \in \mathbb{R}$

$=0+iy = (0,y) \in \mathbb{R}$ (ανικ.)

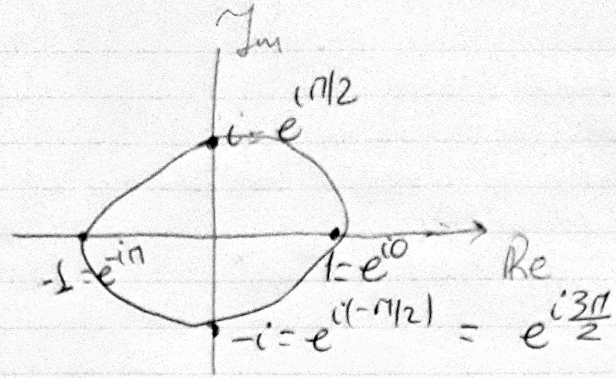
Ορίζουμε τον μιγαδικό αριθμό $\boxed{e^{iy} = \cos y + i\sin y}$

$(=: cis(y))$ ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER

Από τις ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων έχουμε $e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$.

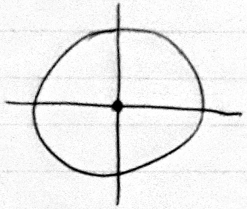
$e^{i\pi/2} = i$

$e^{i\pi} = -1$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i(-\frac{\pi}{2})} = -i$



$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow |e^{iy}| = |\cos y + i \sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$



δηλαδή κάθε $e^{iy} \in S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

$:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

$z = (x,y)$
$= x + iy$

Επίσης: $\underset{\text{άρτια}}{\cos}, \underset{\text{περιττή}}{\sin}\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ μπορούμε να βγάλουμε

άμεσα: $e^{iy} = \cos y - i \sin y$
$= \cos(-y) + i \sin(-y) = e^{-iy}$

Από την 2π-περιοδικότητα των $\cos, \sin$ είναι:
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$e^{i(y+2k\pi)} = \cos(y+2k\pi) + i \sin(y+2k\pi) = \cos y + i \sin y$$

$= e^{i\pi} \quad \forall\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$

και από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \end{aligned}} \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

<u>Πράγματι</u>: $e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$

$= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta + i(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta) =$

$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha+i\beta}$

Συνεπώς, ισχύει: $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$, δηλαδή ισχύει η «χαρακτηριστική» ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης όπως και στο $\mathbb{R}$

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}\cdot e^{x_2} \quad \forall\, x_1,x_2 \in \mathbb{R}$$

(και δικαιολογεί το συμβολισμό $e^{iy} = \cos y + i\sin y$)

<u>Ορισμός</u>: Η συνάρτηση $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ορίζεται ως: $\exp z := e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ και ονομάζεται εκθετική συνάρτηση. όπου:

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x\cdot e^{iy}| = \underbrace{|e^x|}_{=e^x}\underbrace{|e^{iy}|}_{=1}$$

$e^x > 0 \;\forall\, z\in\mathbb{C}$ και $|z|>0 \;\forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

και τελικά $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$

Με αυτόν τον ορισμό έχουμε $\forall\, x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \underbrace{x + i0}_{} \in \mathbb{C}$

$$e^x = e^{x+i0} = e^x \underbrace{e^{i0}}_{=1} \qquad \Leftrightarrow (x,0) \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή η εκθετική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ επεκτείνει την εκθετική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και ισχύει και στο $\mathbb{C}$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad \forall \; z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

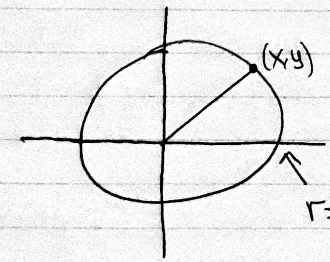
$z_1 = x_1 + y_1 i,\; z_2 = x_2 + i y_2 \Rightarrow z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

$\Rightarrow e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2} \cdot e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1} e^{x_2} \cdot e^{iy_1} e^{iy_2} = e^{x_1} e^{y_1 i} e^{x_2} e^{y_2 i} =$

$= \left(e^{x_1} e^{y_1 i}\right)\left(e^{x_2} e^{i y_2}\right)$

Πολική Μορφή Μιγαδικών

Κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ με καρτεσιανές συντεταγμένες $x, y \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί μοναδικά σε πολικές συντεταγμένες.



$r = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$(r, \varphi) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ μέσω του μετασχηματισμού

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

με αντίστροφο μετασχηματισμό

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και

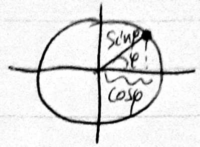
$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0,\; y > 0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x}, & x < 0,\; y > 0 \end{cases}$$

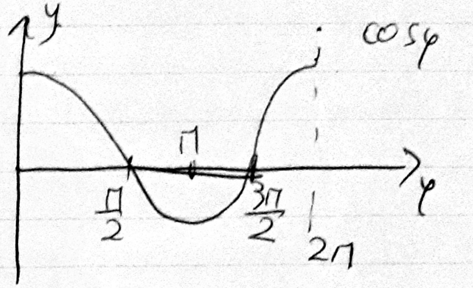
$-\frac{\pi}{2}$, $x=0$, $y<0$

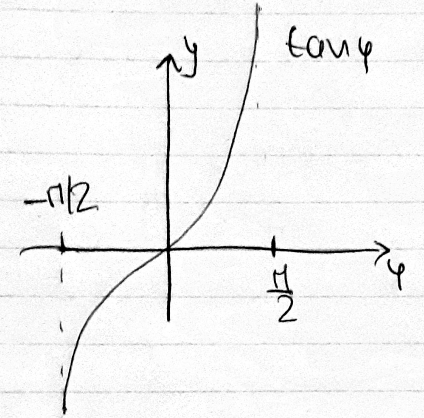
$-\pi + \arctan\frac{y}{x}$, $x<0$, $y<0$

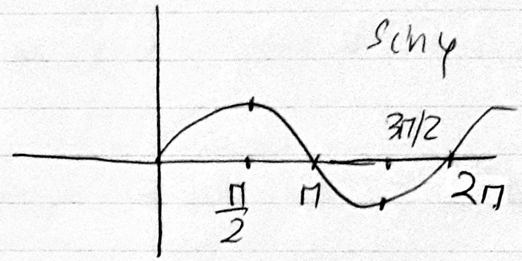
όπου $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ είναι η αντίστροφη της $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

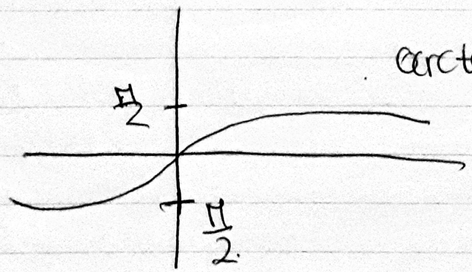
Υπενθύμιση :











arctan u με $\tan(\arctan u) = u$.

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \tan\varphi \Rightarrow \arctan\frac{y}{x} = \varphi$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι καθε μιγαδικός $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ αντιστοιχεί "1-1" και επί με ένα διάνυσμα $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Συνεπώς με τον μετασχηματισμό από καρτ. σε πολικές και τον τύπο του Euler έχουμε $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\boxed{z = x + iy = r\cos\varphi + i r \sin\varphi = r(\cos\varphi + \sin\varphi) = re^{i\varphi}}$$

με τα $(r,\varphi) \in (0,+\infty) \times (-\pi, \pi]$ φ όπως πιο πάνω.

Βέβαια $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ ισχύει και $z = r\underbrace{e^{i(\varphi + 2k\pi)}}$

$$= e^{i\varphi} e^{i2k\pi} = e^{i\varphi}$$

όπου $r = |z|$ και το σύνολο των $\varphi + 2k\pi = \arg z$

$\forall\, k \in \mathbb{Z}$ και για $\underline{k=0}$: $\varphi = \mathrm{Arg}\, z$.